Algebra 1, rozwiązania zadań 25.11.2022

1. Przedstawiamy σ w postaci cykli rozłącznych: $\sigma = (2, 11, 4, 5, 13, 6, 8)(1, 3, 12, 9)$.
Zatem $\sigma^{-1} = (9, 12, 3, 1)(8, 6, 13, 5, 4, 11, 2)$. Cykl długości parzystej (odpowiednio nieparzystej) jest permutacją nieparzystą (parzystą), czyli $\sigma \notin A_{13}$. Zatem $(7, 10)\sigma \in A_{13}$ oraz $(7, 10)\sigma$ jest iloczynem cykli rozłącznych długości $2, 4, 7$. Z wykładu wiemy, że $o((7, 10)\sigma) = \mathrm{NWW}(2, 4, 7) = 28$.
Uwaga: cykle rozłączne są przemienne; ich kolejność nie ma znaczenia.

2. (a) Skoro $[G : H] = n$, to wśród $n + 1$ warstw $H, aH, a^2H, \ldots , a^nH$ muszą być dwie warstwy równe. Zatem $a^iH = a^jH$ dla pewnych $i < j$, $0 \leqslant i, j \leqslant n$. Wtedy $H = a^{j-i}H$, czyli $a^{j-i} \in H$ oraz $0 < j - i \leqslant n$. Przyjmujemy więc $k = j - i$.

   (b) Grupa ilorazowa G/H ma rząd n, więc (z tw. Lagrange'a) jej element aH ma rząd dzielący n. Zatem $(aH)^n = H$ (= element neutralny G/H). Ale $a^nH = (aH)^n$, czyli $a^nH = H$, a więc $a^n \in H$.

3. Niech $C_2 = \{1, a\}$. Niech $f : D_4 \to C_2$ będzie zadane przez $f(\epsilon\rho^i) = a$ oraz $f(\rho^i) = 1$, dla $i = 0, 1, 2, 3$. Jest to homomorfizm otrzymany z homomorfizmu naturalnego $\pi : D_4 \to D_4/F \cong C_2$, gdzie $F = \langle\rho\rangle$ (mamy $F \lhd D_4$ bo $[D_4 : F] = 2$). Składając f z włożeniem $i : C_2 \to S_3 \times C_2$, danym przez: $i(x) = ((1), x)$, dostajemy homomorfizm $i \circ f$ o jądrze równym $F = \langle\rho\rangle$.

   Element ρ^2 jest centralny w D_4, więc $H = \langle\rho^2\rangle$ jest podgrupą normalną rzędu 2. Grupa ilorazowa G/H jest izomorficzna z $C_2 \times C_2$, bo ma rząd 4 ale nie ma elementów rzędu 4. Homomorfizm naturalny $\pi : C_4 \to C_4/H$ daje więc epimorfizm $C_4 \to C_2 \times C_2$. Ale $C_2 \times C_2$ jest izomorficzne z podgrupą $\langle(1, 2)\rangle \times C_2$ grupy $S_3 \times C_2$. Zatem dostajemy homomorfizm $g : D_4 \to S_3 \times C_2$ taki, że $\ker(g) = H$ ma rząd 2. Ten homomorfizm opisany jest przez warunki:
$g(\epsilon\rho^i) = ((1, 2), a)$ i $g(\rho^i) = ((1), a)$ dla $i = 1, 3$, oraz
$g(\epsilon\rho^i) = ((1, 2), 1)$ i $g(\rho^i) = ((1), 1)$, dla $i = 0, 2$.

4. (a) Niech H będzie podgrupą rzędu 6 w D_6. Ponieważ $[D_6 : H] = 2$, to H jest normalna w D_6. Z twierdzenia Cauchy, H ma element rzędu 3. W D_6 są dwa takie elementy: ρ^2 i $\rho^4 = (\rho^2)^{-1}$, skąd wynika, że $g\rho^2g^{-1} \subseteq \langle\rho^2\rangle = \langle\rho^4\rangle$, dla każdego $g \in D_6$ (bo $o(gxg^{-1}) = o(x)$ dla $x, g \in G$). Niech $F = \langle\rho^2\rangle$. Wykazaliśmy, że F jest podgrupą normalną w D_6 oraz $F \subseteq H$.
W szczególności, $H_1 = F \cup \epsilon F = F \cup F\epsilon = \{1, \rho^2, \rho^4, \epsilon, \epsilon\rho^2, \epsilon\rho^4\}$ jest zamknięte na mnożenie, więc jest podgrupą rzędu 6. Podobnie, $H_2 = F \cup \epsilon\rho F = F \cup F\epsilon\rho = \{1, \rho^2, \rho^4, \epsilon\rho, \epsilon\rho^3, \epsilon\rho^5\}$ także jest podgrupą rzędu 6. Oczywiście, $H_3 = \langle\rho\rangle = F \cup \rho F$ też jest jedną z takich podgrup.
Innych podgrup H rzędu 6 nie ma, bo mamy $[H : F] = 2$, więc H musi być sumą dwóch warstw: $F \cup hF$, gdzie $h \notin F$, a są tylko 3 warstwy podgrupy F w D_6 różne od F.

   (b) Z relacji $\epsilon\rho^3\epsilon = \rho^3$ wynika, że ρ^3 jest elementem centralnym. Ponadto jest rzędu 2, więc $\langle\rho^3\rangle \cong C_2$ jest podgrupą normalną. Mamy: $H_1 \cap \langle\rho^3\rangle = \{1\}$, oraz $|D_6| = 12 = |H_1| \cdot |\langle\rho^3\rangle|$; więc z twierdzenia z wykładu dostajemy, że $D_6 = \langle\rho^3\rangle \times H_1$.

   Uwaga: H_1 może być interpretowana jako grupa izometrii własnych trójkąta równobocznego wpisanego w sześciokąt foremny; oczywiście $H_1 \cong S_3$.

5. Ponieważ H jest podgrupą normalną w G, to G działa na H przez automorfizmy wewnętrzne. Czyli mamy homomorfizm $\phi : G \to S_H$, zdefiniowany przez $\phi(g) = \phi_g$, gdzie $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ dla $x \in H$. Wiemy, że każda orbita ma moc dzielącą rząd grupy G. Z założenia o tym, że p jest najmniejszą liczbą pierwszą dzielącą $|G|$ i z faktu, że $|H| = p$ wynika więc, że dla każdego $h \in H$ moc $Orb(h)$ musi być jedną z liczb $1, p$. Z drugiej strony, H jest rozłączną sumą orbit. Ponadto, $Orb(e) = \{e\}$. Zatem wszystkie orbity muszą być jednoelementowe. To oznacza, że każdy element podgrupy H jest centralny, czyli $H \subseteq \mathrm{Z}(G)$.

   Uwaga: jest też nieco inne rozwiązanie, ale także oparte o działanie G na H przez automorfizmy wewnętrzne. Zauważmy, że w istocie $\phi_g \in \mathrm{Aut}(H)$ dla $g \in G$. Czyli $\phi : G \to \mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{Aut}(C_p)$. Ale $\mathrm{Aut}(C_p)$ jest grupą rzędu $p-1$ (jeśli $C_p = \langle a\rangle$, to każdy automorfizm $f \in \mathrm{Aut}(C_p)$ przeprowadza a na pewien generator grupy C_p, a ponadto f jest wyznaczony przez zadanie $f(a)$; więc jest $p-1$ automorfizmów. W istocie, $\mathrm{Aut}(C_p) \cong C_{p-1}$). Zatem, $|\phi(G)|$ z jednej strony dzieli $|\mathrm{Aut}(H)| = p - 1$ (z tw. Lagrange'a, bo $\phi(G) \subseteq \mathrm{Aut}(H)$), a z drugiej strony $|\phi(G)|$ dzieli $|G|$ (bo z twierdzenia o izomorfizmie mamy $|G/\ker(\phi)| = |\phi(G)|$). Z założenia wynika więc, że $|\phi(G)| = 1$, czyli ϕ jest homomorfizmem trywialnym. Z definicji ϕ wynika teraz, że $gxg^{-1} = x$ dla $x \in H$. To oznacza, że $H \subseteq \mathrm{Z}(G)$.